TERMINALE SCIENTIFIQUE	Fichier : Dynamique.doc
Sciences de l'ingénieur	
Cours de mécanique : *Dynamique*	Paul Chassilian
Ce cours comporte 8 pages	N° Cours : **Dyn-04-T**

Constitution du dossier

Sujet : DYNAMIQUE

Plan du cours :

1ère partie : Introduction :

2ème partie : Principe fondamental de la dynamique – Translation rectiligne

3ème partie : Principe fondamental de la dynamique – Rotation

1°) INTRODUCTION

La dynamique est la partie de la mécanique qui traite des mouvements en relation avec les forces qui les engendrent. Newton fut le premier à formuler correctement le principe fondamental de la dynamique et la loi de gravitation universelle. Par la suite, Euler, d'Alembert, Lagrange, Laplace, Poinsot, Coriolis et Einstein apportèrent une contribution importante au développement de cette science essentielle.

Il existe trois méthodes pour traiter un problème de dynamique :

1. Par application du principe fondamental (loi de Newton)
2. Par utilisation des théorèmes relatifs au travail et à l'énergie (Energétique)
3. Par utilisation des théorèmes portant sur les quantités de mouvement et le moment cinétique.

2°) PRINCIPE FONDAMENTAL : CAS D'UN SOLIDE EN TRANSLATION RECTILIGNE

2-1) Enoncé :

Il s'applique indifféremment à un point matériel de masse m ou à un solide en translation rectiligne de masse m et de centre de gravité G.

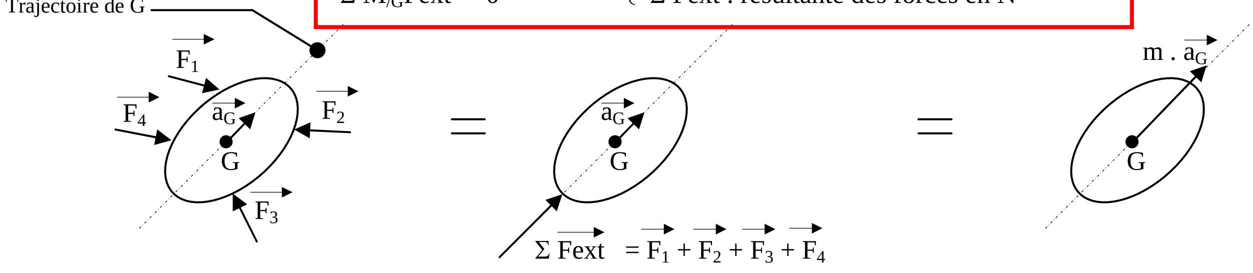
1ère loi :

La première loi correspond au principe fondamental de la statique. Elle s'applique à un solide en équilibre ou à un solide se déplaçant à vitesse constante.

2ème loi :

L'accélération a_G du centre de gravité d'un solide en translation rectiligne par rapport à un repère (ou solide) absolu est proportionnelle à la résultante ($\Sigma \overrightarrow{Fext}$) des forces ou actions extérieures agissant sur le solide et a même direction et même sens que celle-ci.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \Sigma \overrightarrow{Fext} = m \,.\, \overrightarrow{a_G} & \left\{ \begin{array}{l} aG : \text{accélération (absolue) du solide en m/s}^2 \\ m : \text{masse du solide en kg} \\ \Sigma\, Fext : \text{résultante des forces en N} \end{array} \right. \\ \Sigma \overrightarrow{M_{/G}Fext} = 0 & \end{array}}$$



Remarque ***: la résultante Σ Fext doit passer par G, sinon Il y a mouvement plan***

3ème loi :

En statique et en dynamique, les actions mutuelles entre deux solides sont égales et directement opposées.

2-2) <u>Observation</u> :

Notion de repère absolu :

Pour que le principe fondamental de la dynamique soit correct, l'accélération a_G doit être une ***accélération absolue***. Par commodité, l'accélération a_G est généralement repérée ou déterminée par rapport à un repère fixe lié à la terre (référence absolue). Cependant, la terre n'est pas un référentiel absolu (ou galiléen) rigoureux mais approché. Pour la plupart des problèmes de mécanique terrestre, cette approximation suffit et amène des erreurs négligeables. Pour un certain nombre de problèmes, faisant intervenir des avions, des fusées, des missiles ou autres soucoupes volantes, il est parfois nécessaire de faire intervenir les accélérations dues aux mouvements de la terre.

<u>Exemples</u> : Pour un corps en chute libre, la rotation de la terre autour de son axe engendre une légère accélération dirigée vers l'est (accélération de Coriolis) créant une perturbation du mouvement de chute libre. Le solide ne tombe pas exactement verticalement mais subit une déviation vers l'est égale à :

$$d = ((2.\omega.\cos\theta) / 3) . \sqrt{((2.h3) / g)}$$

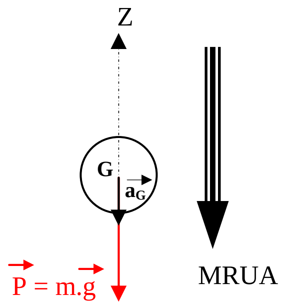
avec $\omega = 0.729 \times 10^{-4}$ rad/s (vitesse de rotation de la terre)
$g = 9.81$ m.s² (accélération de la pesanteur)
h = hauteur de la chute en m
θ = latitude nord ou sud

Notion de temps relatif et temps absolu :

Dans l'équation de Newton, le temps est considéré comme une grandeur absolue, s'écoulant inexorablement d'arrière en avant au rythme régulier indiqué par les pendules et les calendriers.
D'après Einstein, le temps n'est pas absolu mais relatif et dépend de la vitesse propre de l'observateur et de la position finale de celui-ci. Cependant la notion de temps relatif n'est valables que pour des particules se déplaçant à très grande vitesse (proche de la vitesse de la lumière (300 000 km/s).

2-3) <u>Exemples</u> :

<u>Exemple 1</u> : Une sphère de 1Kg est en chute libre, la résistance de l'air est négligée.



$\Sigma \overrightarrow{Fext} = \vec{P}$ (vecteur poids)

$\vec{a}_G = 9.81$ m/s² (accélération de la pesanteur)

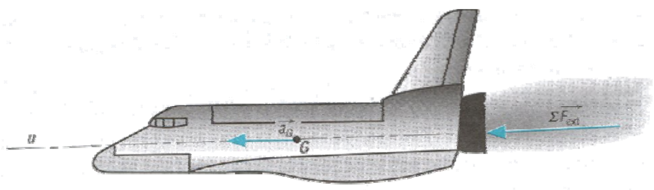
PFD : $\Sigma \overrightarrow{Fext} = m.\vec{g}$ d'où $\vec{P} = m.\vec{g}$

En projection sur l'axe z : $P = m.g = 1 \times 9.81 = 9.81$ N

<u>Exemple 2</u> : Une Navette spatiale est supposée à l'arrêt dans l'espace. Ces 3 moteurs sont allumés, la poussée de chaque moteur est de 2 300 kN, les 3 poussées sont parallèles et leur résultante passe par G. Déterminons l'accélération supportée par un astronaute, si la masse de l'engin est de 100 tonnes.

$\Sigma \overrightarrow{Fext} = m . \vec{a}_G$ donne en projection sur u

Σ Fext = 3 x 2 300 000 = 6 900 000 N ; m = 100 000 kg



6 900 000 = 100 000 x a_G d'où a_G = 6 900 000 / 100 000

a_G = 69 m/s² soit environ 7g (69/9.81=7.033).

2-4) <u>Principe de d'Alembert</u> :

La 2ème loi du principe fondamental peut s'écrire sous la forme du principe de d'Alembert :

$$\sum \overrightarrow{Fext} - m \cdot \overrightarrow{a_G} = \sum \overrightarrow{Fext} + \overrightarrow{F_I} = \vec{0}$$

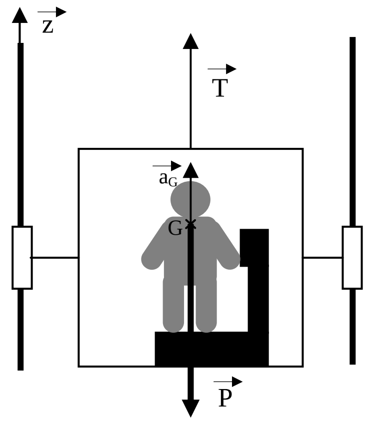
$\overrightarrow{F_I} = (- m \cdot \overrightarrow{a_G})$ est appelée « force d'inertie » ; cette force est opposée à l'accélération.

$$\sum \overrightarrow{M_{/P}Fext} = \vec{0}$$

Remarque : *Ecrit sous cette forme, le PFD se ramène au PFS et FI devient un effort extérieur. Toutes les méthodes et théorèmes vus en statique sont utilisables (isolement du solide etc.).*

<u>Exemple</u> : Cabine d'ascenseur

Un homme de 80 kg se tient debout sur une balance dans une cabine d'ascenseur à l'arrêt. Le moteur est mis en route et la tension du câble T atteint la valeur de 900 daN pendant les trois premières secondes.
Si l'accélération est supposée constante, quelle valeur peut-on lire sur la balance ?
Les frottements sont négligés et la masse de la cabine (cabine +balance) est de 720kg.
Le centre de gravité G de l'ensemble est situé sur la verticale commune aux actions T et P.



<u>Résolution</u> :

1) Isolons l'ensemble cabine + homme + balance :

Les actions des rails sur la cabine ne sont pas prises en compte car elles sont perpendiculaires à l'axe z (pas de composante sur z).

Le principe de d'Alembert s'écrit : $\vec{P} + \vec{T} - m\,\overrightarrow{a_G} = \vec{0}$

En projection sur l'axe z on obtient : $-P + T - m\,a_G = 0$

$[(720 + 80) \times 9.81] + 9\,000 - (720 + 80) \times a_G = 0$

$a_G = 1.44$ m/s²

2) Isolons l'homme seul :

Il est soumis à 3 actions :

Son poids $\overrightarrow{P_h}$ (80 x 9.81 = 784.8 N)

L'action exercée par la balance $\vec{B}$

La force d'inertie $\overrightarrow{F_I}$ ($- m_h \cdot a_G$ = - 80 x 1.44 = - 115.2 N)

On a : $\overrightarrow{P_h} + \vec{B} + \overrightarrow{F_I} = \vec{0}$

En projection sur z on obtient : $- P_h + B + F_I = 0$

$B = 784.8 + 115.2 = 900$ N

La masse mesurée par la balance est : 900 / 9.81 = 91.74 kg (1.15 x son poids)

3°) CAS D'UN SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE

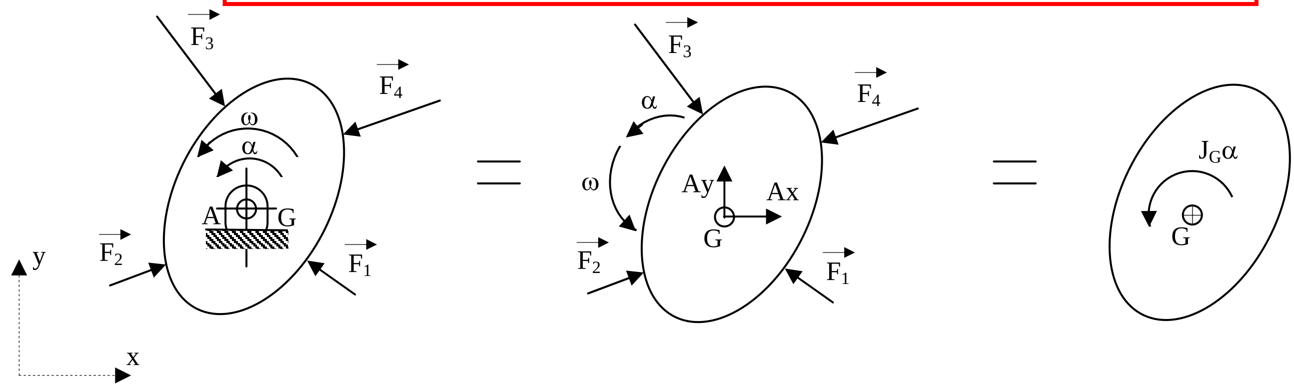
3-1) __Premier cas__ : Le centre de gravité est situé sur l'axe de rotation

- Sa vitesse de rotation ω en rad/s
- Son accélération angulaire α en rad/s²
- Le centre de gravité G est situé sur le centre de rotation.
- Ax et Ay sont les actions exercées sur le palier par la liaison pivot
- J_G et le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (G,z) qui est aussi l'axe de rotation.

3-1.1) __Enoncé__ :

La première et la troisième loi reste identiques au chapitre précédent. La deuxième loi s'énonce :

$$\begin{cases} \Sigma \overrightarrow{Fext} = \overrightarrow{Ax} + \overrightarrow{Ay} + \overrightarrow{F1} + \overrightarrow{F2} + \ldots = \vec{0} \\ \Sigma M_{/G} (\overrightarrow{Fext}) = \Sigma M_{/A} (\overrightarrow{Fext}) = J_G \cdot \alpha \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Sigma \text{ Fext en N} \\ \Sigma M_{/G} \text{ (Fext) en Nm} \\ J_G \text{ en m}^2\text{.kg et } \alpha \text{ en rad/s}^2 \end{cases}$$



Remarques : $\Sigma M_{/G} (\overrightarrow{Fext}) = M_{/G} (\overrightarrow{F_1}) + M_{/G} (\overrightarrow{F_2}) + \ldots$

Pour un système de forces planes, on dispose de trois équations de projection :

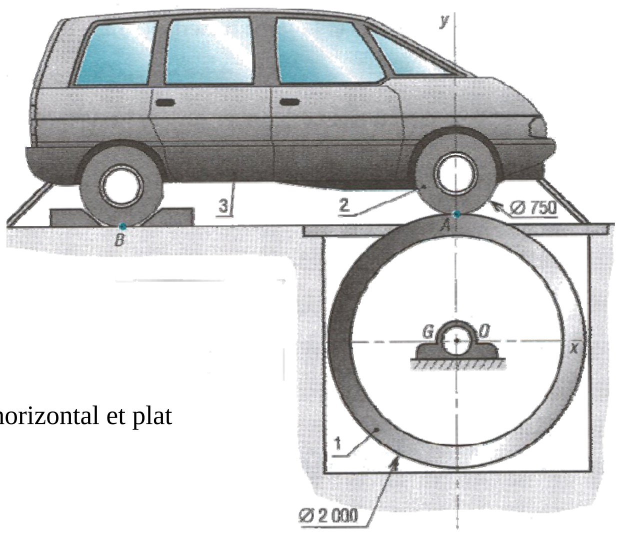
$\Sigma\, Fext_{/x} = 0$

$\Sigma\, Fext_{/y} = 0$

$\Sigma\, M_{/G} (Fext)_{/z} = J_G\, \alpha$

3-1.2) __Exemple__ :

Dans un laboratoire d'essai de véhicule, on utilise un dispositif à tambour pour déterminer les vitesses et accélérations des véhicules. Les roues motrices de la voiture sont posées sur un tambour de rayon R = 1m, longueur l = 2.5 m et moment d'inertie J_G ajustable. La masse totale du véhicule est de 2000kg, l'essieu avant supporte, au repos une charge de 1200 daN.
Quelle doit etre la valeur de J_G pour que le tambour se comporte comme le vehicule au démarrage ou au freinage (accélération tangentielle tambour a_t = accélération véhicule a_V.



__Résolution__ :

Isolons la voiture :

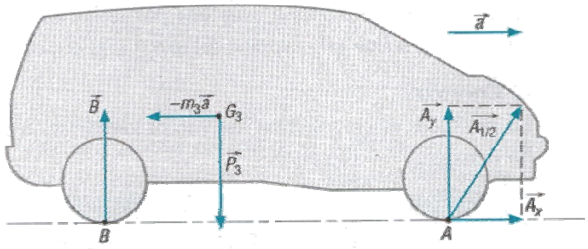
Hypothèses de départ :

- a est l'accélération du véhicule sur un sol horizontal et plat
- P_3 est le poids de la voiture
- $A_{1/2}$ et B sont les actions sur les roues
- $-m_3.a$ est la force d'inertie au démarrage.

Le principe de d'Alembert donne :

$$\vec{P_3} + \vec{B} + \vec{A_{1/2}} - m_3.\vec{a} = \vec{0}$$

En projection sur l'axe x on obtient : $Ax_{1/2} - m_3.a = 0$



Isolons le tambour :

❶ $\Sigma \vec{Fext} = \vec{P1} + \vec{Ox} + \vec{Oy} - \vec{Ax} - \vec{Ay} = \vec{0}$

❷ $\Sigma M_{/G}(Fext) = M_{/G}(-\vec{Ax}) = JG\ \alpha$ (rq : toutes les forces sauf Ax passe par G et ont donc un moment nul)

On a : $a = a_{tA} / R = a / R = Ax / (m_3.R)$ où atA est l'accélération tangentielle de A.

L'équation ❷ devient : $Ax . R = (Ax / (m_3.R)) . J_G$ d'où $J_G = m_3 . R^2$

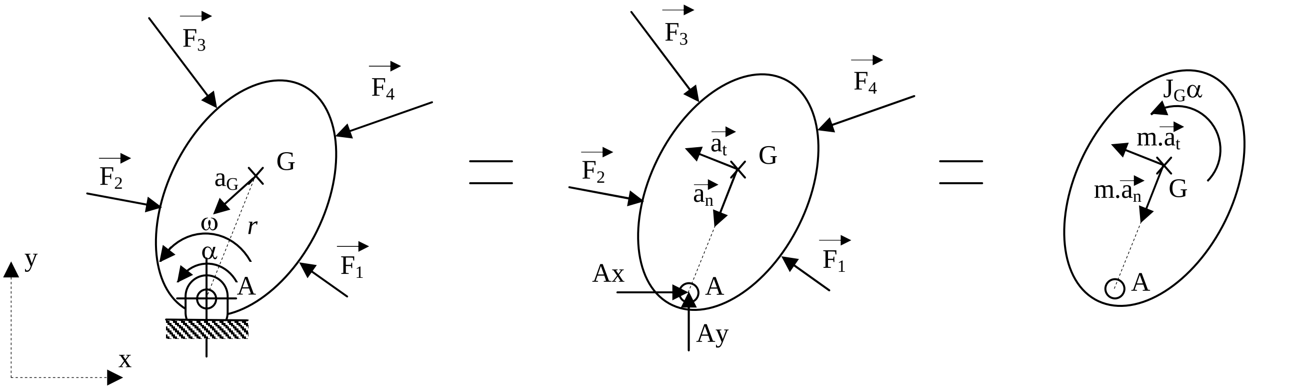
3-2) Second cas : Le centre de gravité n'est pas sur l'axe de rotation

- a_G est l'accélératin du point G (a_n est l'accélération normale et a_t l'accélération tangentielle).
- α est l'accélération angulaire du mouvement.
- J_G et J_A sont les moments d'inertie en G et en A.

3-2.1) Enoncé :

La deuxième loi devient :

$$\begin{cases} \Sigma \text{ Fext} = Ax + Ay + F1 + F2 + \ldots = m . a_G \\ \quad \text{avec } a_G = a_n + a_t \text{ ; } a_n = \omega^2.r \text{ ; } a_t = \alpha.r \\ \Sigma M_{/G} (\text{Fext}) = J_G . \alpha \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Sigma \text{ Fext en N et } \Sigma M_{/G} (\text{Fext}) \text{ en Nm} \\ \text{a en m/s}^2 \text{ et m en kg} \\ J_G \text{ en m}^2\text{.kg , } \alpha \text{ en rad/s}^2 \text{ et } r = AG \text{ en m} \end{cases}$$

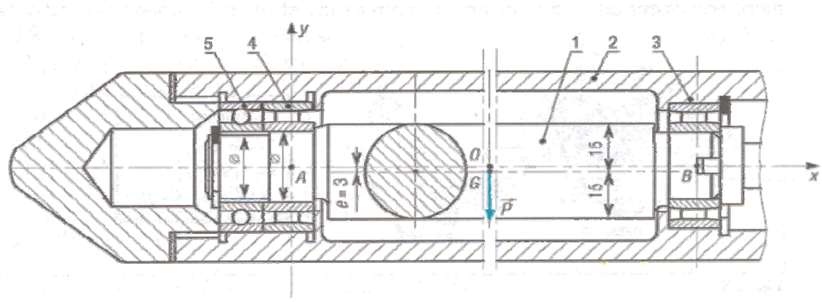


Remarques : En projection sur n (ou AG) : $\Sigma F_n = - m . \omega^2 . r$
En projection sur t (perpendiculaire à n) : $\Sigma F_t = m . \alpha . r$
L'équation de moment en G peut être remplacée par l'équation en A :

$$\Sigma M_{/A} (\text{Fext}) = J_A . \alpha \qquad \text{avec } J_A = J_G + m . r^2$$

3-1.2) Exemple :

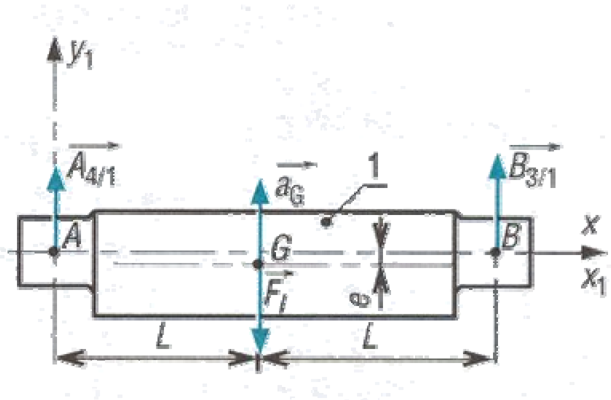
L'appareil présenté sert à tasser le béton liquide. Les vibrations sont produites par la rotation d'un arbre excentré (excentration = 3 mm). Cet arbre est guidé en rotation par trois roulements (3, 4, 5). La vitesse de rotation maximale est de 10 000 t/min, la puissance d'entraînement est de 1.5 kW et la masse de l'arbre est de 2 kg.



Déterminons les actions supposées par les roulements en A et B, à vitesse constante et le couple de démarrage si l'accélération angulaire α est de 5 000 rad/s²

Résolution :

Isolons la l'axe :



(A, x_1, y_1,) est un repére lié à l'arbre 1

Détermination des actions en A et B à 10 000 tr/min

$\alpha = 0$; $a_t = 0$; $a_n = \omega^2.e$; $\omega = (10\,000 \,.\, \pi) / 30 = 1047$ rad/s²*

Σ Fext = $A_{4/1} + B_{3/1} = m \,.\, a_G = - F_i$ (F_i : Force d'inertie sur l'arbre)

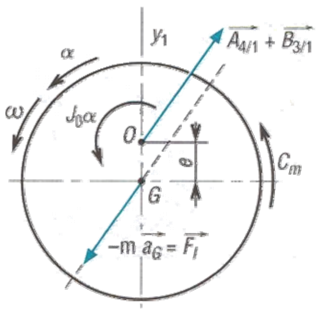
En projection sur x : 0 = 0.

En projection sur y_1 : $A_{4/1} + B_{3/1} = m \,.\, a_n$

A et B sont symétrique par rapport à G, d'où :

$A_{4/1} = B_{3/1} = (m.a_n) / 2 = (2 \times 1047^2 \times 0.003) / 2 = 3290$ N

Détermination du couple moteur C_m si α = 5 000 rad/s²



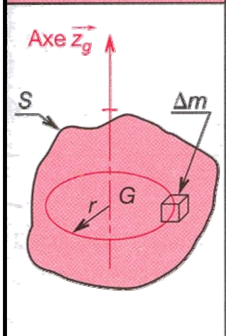
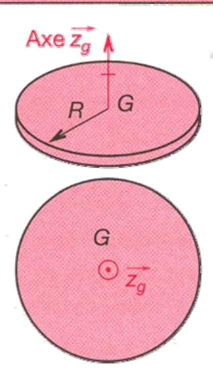
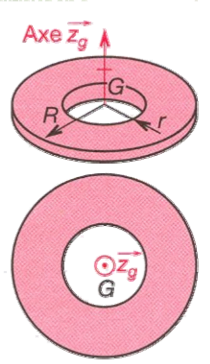
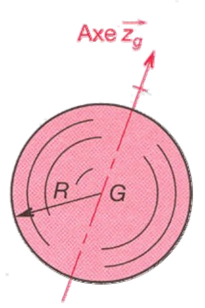
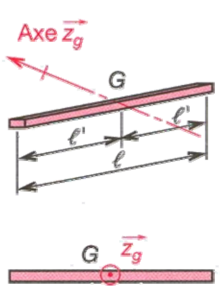
Ecrivons l'équation de moment par rapport au point O

$\Sigma M_{/O}$ (Fext) = $J_O \,.\, \alpha = (J_G + m \,.\, e^2) \,.\, \alpha$

$C_m = [((m \,.\, R^2) / 2) + m \,.\, e^2] \,.\, \alpha = m\,[(R^2 / 2) + e^2] \,.\, \alpha$

$C_m = 2[(0.015^2 / 2) + 0.003^2] \times 5\,000 = 1.215$ Nm

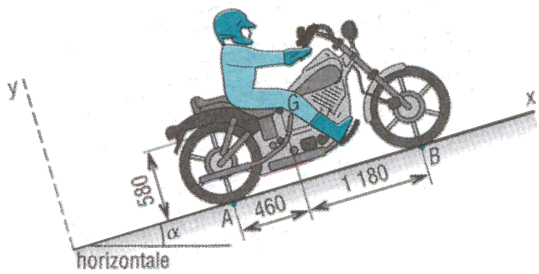
Calcul du moment d'inertie J d'un solide par rapport à un axe passant par son centre de gravité

Définition $\Sigma(\Delta m) = m$ (kg) J_{Gzg} (ou PD^2 *)	Cylindre plein homogène masse m (kg)	Cylindre creux (couronne) homogène masse m (kg)	Sphère pleine homogène masse m (kg)	Tige rectiligne section négligeable homogène, masse m (kg)
				
$J_{Gzg} = \Sigma(\Delta m \,.\, r^2)$ kg.m² kg m²	$J_{Gzg} = \frac{1}{2} m \,.\, R^2$	$J_{Gzg} = \frac{1}{2} m\,(R^2 + r^2)$	$J_{Gzg} = \frac{2}{5} m \,.\, R^2$	$J_{Gzg} = \frac{m\,\ell^2}{12} = \frac{m\,\ell'^2}{3}$

Applications :

1°) Une moto atteint la vitesse de 86.4 km/h, départ arrêté, sur 60 m sur une pente de 10%.

Le poids de l'ensemble moto + pilote est de 340 daN appliqué en G.

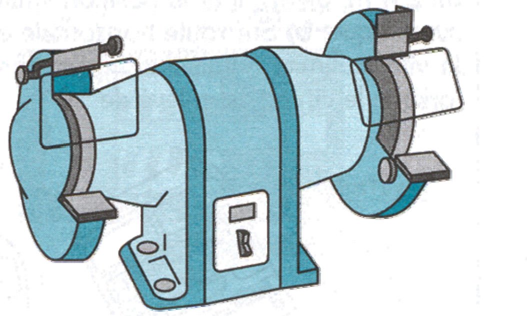


Déterminer :

- L'accélération du mouvement.
- Les actions exercées en A et B
- Le coefficient de frottement en A

2°) Un touret à meuler tourne à la fréquence de 3000 tr/min.
L'alimentation électrique est coupée, la broche met 40 secondes pour s'immobiliser.

Déterminer la décélération angulaire a si celle-ci est supposée constante.



L'ensemble meule + arbre est assimilé au dessin ci contre, la masse volumique des meules est de 2 500 kg/m^3, celle de l'arbre (en acier) est de 7 800 kg/m^3.

Déterminer le moment d'inertie de l'ensemble et le couple résistant exercé par les paliers pendant la phase d'arrêt.